

Exkurs: Konjunktive Normalform

Wenn wir die Wahrheitstabelle für die Darstellung der Binärzahlen von Null bis Sieben mithilfe der Siebensegmentanzeige betrachten (s. Tabelle 1), fällt auf, dass bei einigen Segmenten in sehr vielen Zeilen die Ausgabe 1 ist. Bei Segment A und B ist die Ausgabe z. B. nur in zwei Zeilen 0 und bei Segment C sogar nur in einer Zeile. Dadurch müssen für die disjunktive Normalform sehr viele Minterme verknüpft werden und der Schaltterm wird sehr lang.



Abbildung 2: Darstellung der Ziffern 0 bis 7 in der Siebensegmentanzeige

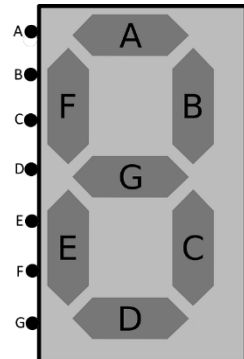


Abbildung 1: Baustein für die Siebensegmentanzeige

a_2	a_1	a_0	Segment A	Segment B	Segment C	Segment D	Segment E	Segment F	Segment G
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Tabelle 1: Wahrheitstabelle für die Segmente der Siebensegmentanzeige

In den Fällen, in denen mehr Eingabekombinationen zu der Ausgabe 1 als zu der Ausgabe 0 führen, bietet es sich daher an, sich stattdessen auf die Zeilen zu konzentrieren, in denen die Ausgabe 0 ist.

Die ODER-Verknüpfung eignet sich zur Erzeugung eines Terms, der nur für eine Belegung der Schaltvariablen 0 ist und sonst 1. Wenn in mehreren Zeilen die Ausgabe 0 vorkommt, müssen wir die Ausgabe daher wieder in entsprechend viele Hilfsspalten zerlegen. Das schauen wir uns später für Segment A an. Für Segment C haben wir passenderweise sogar nur einmal die Ausgabe 0. Die Ausgabe der ODER-Verknüpfung wird genau dann 0, wenn jede Schaltvariable in der ODER-Verknüpfung mit 0 belegt ist. Für den Term $a_2 \vee a_1 \vee a_0$ würde die Ausgabe 0 daher in Zeile 1 erzeugt. Damit wir für Segment C die Ausgabe 0 stattdessen in Zeile 3 erhalten, müssen wir die Schaltvariable a_1 negieren, da diese in Zeile 1 mit 1 belegt ist. So erhalten wir den Term $a_2 \vee \overline{a_1} \vee a_0$ für Segment C. Einen solchen Term bezeichnet man als **Maxterm**.

Aufgabe 1: Zeige mithilfe einer Wahrheitstabelle oder einer Simulation der Schaltung, dass die Schaltfunktion $C = a_2 \vee \overline{a_1} \vee a_0$ eine geeignete Schaltfunktion für Segment C ist.

Da für Segment A in zwei Zeilen die Ausgabe 0 ist, müssen wir die Ausgabe hier zunächst in zwei Hilfsspalten zerlegen, in denen die Ausgabe jeweils nur in einer Zeile 0 ist. Für jede Hilfsspalte wird dann der Maxterm erzeugt:

$$A1 = a_2 \vee a_1 \vee \overline{a_0}$$

$$A2 = \overline{a_2} \vee a_1 \vee a_0$$

Da die Ausgabe für Segment A genau dann 1 ist, wenn beide Maxterme den Wert 1 annehmen werden die Maxterme mit UND

verknüpft. So erhalten wir den Schaltterm in der **konjunktiven Normalform (KNF)**:

$$(a_2 \vee a_1 \vee \overline{a_0}) \wedge (\overline{a_2} \vee a_1 \vee a_0)$$

Wir fassen das Vorgehen zum Erstellen der konjunktiven Normalform aus einer Wahrheitstabelle noch einmal zusammen:

1. Erstelle für jede Zeile, in der die Ausgabe 0 ist, eine Hilfsspalte mit einer 0 in dieser Zeile und sonst 1en.
2. Stelle für jede Hilfsspalte den Maxterm auf. Dazu werden die Schaltvariablen mit ODER verknüpft. Schaltvariablen, die in der Zeile, in der die Ausgabe 0 ist, mit 1 belegt sind, werden negiert.
3. Verknüpfe die einzelnen Maxterme mit UND

Anmerkung zu Schritt 1 und 2: Anstatt die Hilfsspalten jedes Mal explizit anzulegen, reicht es aus, die Ausgabe in Gedanken zu zerlegen und jede Zeile mit der Ausgabe 0 einzeln zu betrachten.

Aufgabe 2:

- a) Gib die Schaltterme für die Segmente B, D, E, F und G in der konjunktiven Normalform an.
- b) Verwende die Schaltterme in der KNF für die Segmente A bis G, um die Schaltung für die Darstellung der Zahlen 0 bis 7 in der Siebensegmentanzeige in einem Simulationsprogramm zu konstruieren.
- c) Erläutere, wie sich die Struktur der disjunktiven Normalform in deiner Schaltung widerspiegelt.

a ₂	a ₁	a ₀	Segment A	Hilf A1	Hilf A2
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Tabelle 2: Zerlegung der Ausgabe für Segment A in Hilfsspalten

Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Nicht-kommerziell - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/). Sie erlaubt Bearbeitungen und Weiterverteilung des Werks unter Nennung meines Namens und unter gleichen Bedingungen, jedoch keinerlei kommerzielle Nutzung.

Bildnachweis: Abbildung 1 und 2 basieren auf einer Vorlage von pixabay.com, die ohne Bildnachweis frei genutzt werden darf.